

**PROCESSO SELETIVO - UFPR 2010 - Fase 02**

**Comentários UFPR Matemática  
Professores Expoente - Kalinke Domenico Bus e Cláudio**

A prova discursiva deste ano premiou o aluno que assistiu às aulas com muita atenção, e em particular ouviu as dicas das aulas de revisão. As questões contemplaram assuntos tradicionais do ensino médio.

Para o aluno que recentemente resolveu a prova do ENEM, verificou que nesta segunda fase da UFPR as questões também focaram temas relacionados a situações do cotidiano. Temos certeza de que o aluno expoente sentiu-se valorizado nesta prova e bastante seguro.

O Núcleo de Concursos da UFPR está sempre apresentando uma prova inovadora que de fato valoriza o aluno que compreende e sabe analisar o enunciado formulado. Parabenizamos a comissão organizadora por mais este teste de seleção.

01 - Sabe-se que a velocidade do som no ar depende da temperatura. Uma equação que relaciona essa velocidade  $v$  (em metros por segundo) com a temperatura  $t$  (em graus Celsius) de maneira aproximada é  $v = 20\sqrt{t + 273}$ . Com base nessas informações, responda às seguintes perguntas:

a) Qual é a velocidade do som à temperatura de  $27^\circ\text{C}$ ? (Sugestão: use  $\sqrt{3} = 1,73$ )

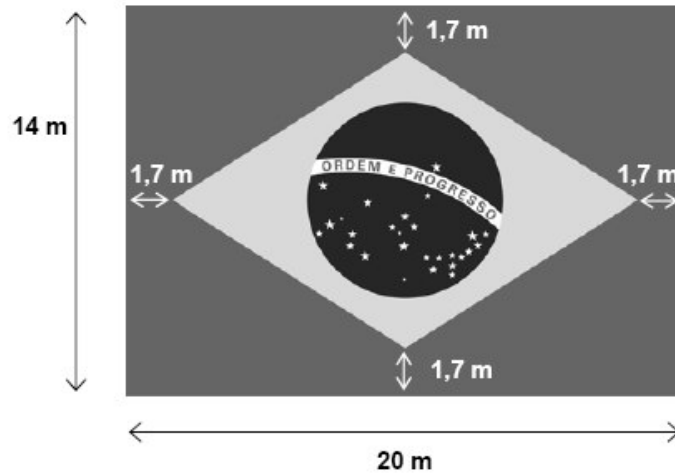
b) Costuma-se assumir que a velocidade do som é de  $340\text{ m/s}$  (metros por segundo). Isso ocorre a que temperatura?

**Questão 01 – Solução**

a)  $v(27) = 20\sqrt{27 + 273} \Rightarrow v(27) = 346\text{ m/s}$

b)  $340 = 20\sqrt{t + 273} \Rightarrow t = 16^\circ\text{C}$

02 - A bandeira do Brasil, hasteada na Praça dos Três Poderes, em Brasília, é uma das maiores bandeiras hasteadas do mundo. A figura abaixo indica as suas medidas de acordo com as normas oficiais.



- a) Sabendo-se que o raio do círculo azul da bandeira da Praça dos Três Poderes mede 3,5 m, quanto mede a área da região amarela visível dessa bandeira? Sugestão: use  $\pi = 3,14$ .
- b) Deseja-se construir uma bandeira do Brasil com o lado maior do retângulo medindo 2 m e nas mesmas proporções da bandeira da Praça dos Três Poderes. Qual será a medida da região amarela visível dessa outra bandeira?

### Questão 02 – Solução

$$a) \quad S = \frac{D \cdot d}{2} - \pi R^2 \Rightarrow S = \frac{16,6 - 10,6}{2} - 3,14 \cdot 3,5^2 \Rightarrow S = 87,98 - 38,46 = 49,52 \text{ m}^2$$

$$b) \quad \left(\frac{20}{2}\right)^2 = \frac{49,52}{x} \Rightarrow 100 = \frac{49,52}{x} \Rightarrow x = 0,4952 \text{ m}^2$$

03 - Suponha que o tempo  $t$  (em minutos) necessário para ferver água em um forno de micro-ondas seja dado pela função

$$t(n) = a \cdot n^b$$

sendo  $a$  e  $b$  constantes e  $n$  o número de copos de água que se deseja aquecer.

Número de copos	Tempo de aquecimento
1	1 minuto e 30 segundos
2	2 minutos

- a) Com base nos dados da tabela ao lado, determine os valores de  $a$  e  $b$ . Sugestão: use  $\log 2 = 0,30$  e  $\log 3 = 0,45$ .
- b) Qual é o tempo necessário para se ferverem 4 copos de água nesse forno de micro-ondas?

### Questão 03 – Solução

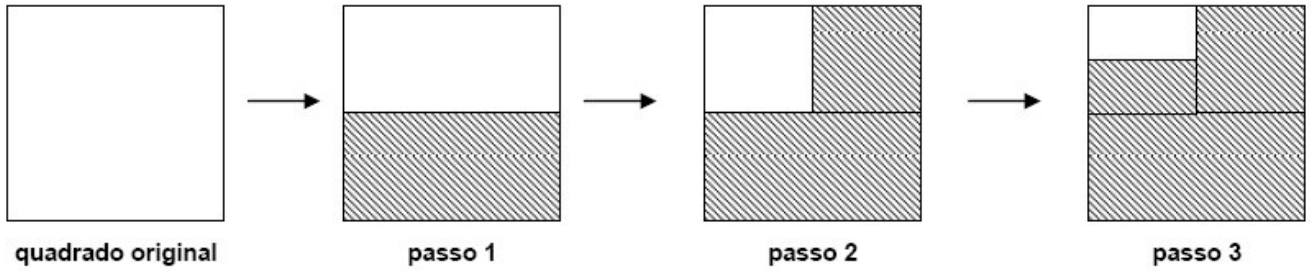
$$a) \quad t(1) = a \cdot 1^b \Rightarrow t(1) = a \cdot 1 \Rightarrow a = 1,5$$

$$t(2) = 1,5 \cdot 2^b \Rightarrow 2^b = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{Aplicando logaritmos, obtemos } b = 0,5.$$

Portanto,  $a = 1,5$  e  $b = 0,5$

$$b) \quad t(4) = 1,5 \cdot 4^{0,5} \Rightarrow t(4) = 3 \text{ minutos}$$

04 - Um quadrado está sendo preenchido como mostra a sequência de figuras abaixo:



No passo 1, metade do quadrado original é preenchido. No passo 2, metade da área não coberta no passo anterior é preenchida. No passo 3, metade da área não coberta nos passos anteriores é preenchida, e assim por diante.

- No passo 4, que percentual do quadrado original estará preenchido?
- Qual é o número mínimo de passos necessários para que 99,9% do quadrado original seja preenchido?

### Questão 04 – Solução

a) passo 1:  $1/2$

passo 2:  $3/4$ ;  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\right)$

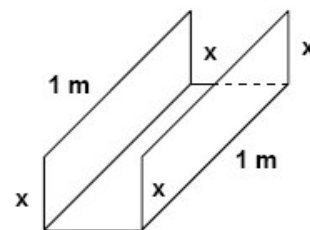
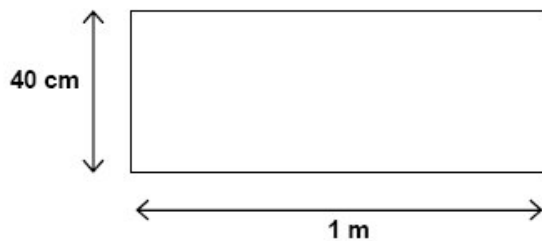
passo 3:  $7/8$ ;  $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{8}\right)$

passo 4:  $15/16$ ;  $\left(\frac{7}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{15}{16}\right) = 93,75\%$

b)  $\frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{99,9}{100} \Rightarrow \text{fazendo } 2^n = x \Rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{99,9}{100} \Rightarrow x = 1000$

Logo, por aproximação, temos que:  $2^n > 1000 \Rightarrow n = 10$

05 - Uma calha será construída a partir de folhas metálicas em formato retangular, cada uma medindo 1 m por 40 cm. Fazendo-se duas dobras de largura  $x$ , paralelas ao lado maior de uma dessas folhas, obtém-se três faces de um bloco retangular, como mostra a figura da direita.



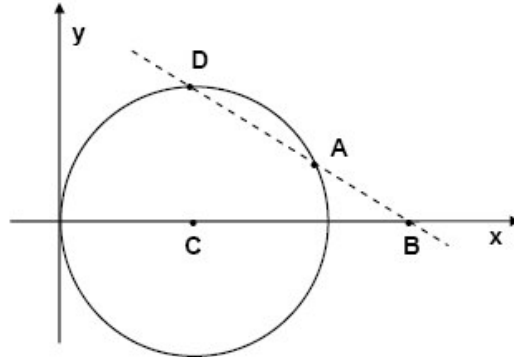
- Obtenha uma expressão para o volume desse bloco retangular em termos de  $x$ .
- Para qual valor de  $x$  o volume desse bloco retangular será máximo?

### Questão 05 – Solução

a)  $V(x) = (40 - 2x) \cdot x \cdot 100 \Rightarrow V(x) = (4000x - 200x^2) \text{ cm}^3$

$$b) x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{4000}{2(-200)} \Rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

06 - A figura abaixo mostra uma circunferência tangente ao eixo y, com centro C sobre o eixo x e diâmetro de 10 unidades.



- a) Sabendo que  $A = (8,4)$  e que  $r: 3y + x = 20$  é a reta que passa por A e B, calcule a área do triângulo CAB.
- b) Encontre as coordenadas do ponto D, indicado na figura acima, no qual a reta r intercepta a circunferência.

### Questão 06 – Solução

a) Temos  $B(x,0) \Rightarrow 3(0) + x = 20 \Rightarrow x = 20$

Portanto:

$$\begin{cases} A(8,4) \\ B(20,0) \\ C(5,0) \end{cases} \Rightarrow S = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 8 & 20 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \right| \Rightarrow S = 30 \text{ ua}$$

b)

Equação da circunferência  $\Rightarrow (x-5)^2 + (y-0)^2 = 5^2$

Logo, resolvendo o sistema  $\begin{cases} x + 3y = 20 \\ (x-5)^2 + (y-0)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(8,4) \\ D(5,5) \end{cases}$  Portanto  $D(5,5)$

07 - Considere a função f definida pela expressão

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(2x) & \operatorname{sen} x & 0 \\ \cos x & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcule  $f(0)$  e  $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

b) Para quais valores de  $x$  se tem  $f(x) = 0$ ?

### Questão 07 – Solução

$$\text{a) } f(0) = \begin{vmatrix} \cos 0 & \operatorname{sen} 0 & 0 \\ \cos 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow f(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow f(0) = 1$$

e

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

b)

$$\begin{vmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \cos x & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \cos 2x - 2\operatorname{sen} x \cos x = 0 \Rightarrow \cos 2x - \operatorname{sen} 2x = 0$$

Logo

$$\operatorname{tg} 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

08 - Um cadeado com segredo possui três engrenagens, cada uma contendo todos os dígitos de 0 a 9. Para abrir esse cadeado, os dígitos do segredo devem ser colocados numa sequência correta, escolhendo-se um dígito em cada engrenagem. (Exemplos: 237, 366, 593...)

- a) Quantas possibilidades diferentes existem para a escolha do segredo, sabendo que o dígito 3 deve aparecer obrigatoriamente e uma única vez?
- b) Qual é a probabilidade de se escolher um segredo no qual todos os dígitos são distintos e o dígito 3 aparece obrigatoriamente?

### Questão 08 – Solução

a)  $(1 \times 9 \times 9) \times 3 = 243$

b)  $\frac{3 \times (1 \times 9 \times 8)}{10 \times 10 \times 10} = \frac{216}{1000} = \frac{27}{125}$

09 - Uma parábola é o gráfico de uma função da forma  $y = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ .

- a) Encontre a função cujo gráfico é a parábola que contém os pontos  $P = (-1, 2)$ ,  $Q = (1, 2)$  e  $R = (2, 5)$ . Sugestão: utilize os pontos dados para construir um sistema linear.
- b) Existe uma parábola que contém os pontos  $P = (-1, -1)$ ,  $Q = (1, 3)$  e  $R = (2, 5)$ ? Justifique.

### Questão 09 – Solução

a)

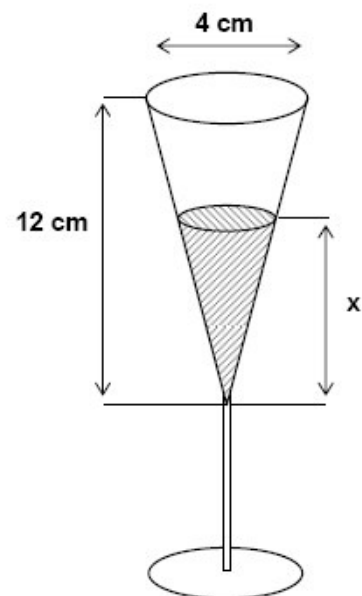
$$\begin{cases} a-b+c=2 \\ a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow y=1x^2+1$$

b)

Não. Os pontos P, Q e R estão alinhados.

10 - A parte superior de uma taça tem o formato de um cone, com as dimensões indicadas na figura.

a) Qual o volume de líquido que essa taça comporta quando está completamente cheia?



b) Obtenha uma expressão para o volume  $V$  de líquido nessa taça, em função da altura  $x$  indicada na figura.

### Questão 10 – Solução

a)  $V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 12}{3} = 16\pi \text{ cm}^3$

b)  $\left(\frac{12}{x}\right)^3 = \frac{16\pi}{v} \Rightarrow \frac{1728}{x^3} = \frac{16\pi}{v} \Rightarrow v = \frac{16\pi x^3}{1728} \Rightarrow v = \frac{\pi x^3}{108}$