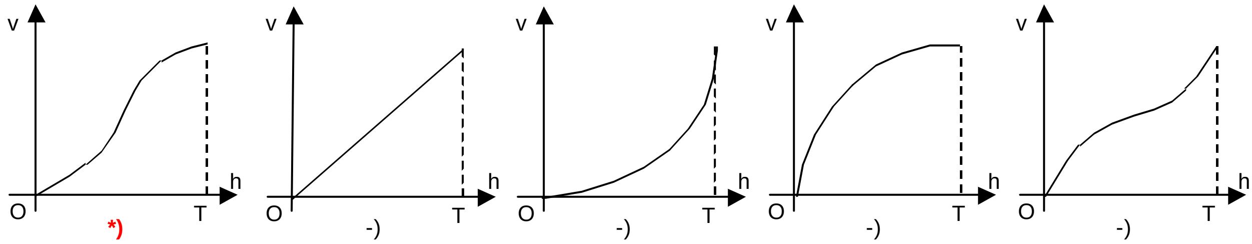
MATEMÁTICA

01 - O tanque de combustível de um posto de gasolina possui o formato de um cilindro circular reto e está instalado de modo que as bases estão na vertical. Para saber o volume de combustível presente no tanque, o funcionário utiliza uma régua graduada e só necessita observar a altura alcançada pelo combustível dentro do tanque. Essa régua foi confeccionada com base no estudo da função que relaciona o volume v **com a altura** h**, desde zero até a altura total T. Qual dos gráficos abaixo mais se aproxima do gráfico dessa função?**



*) -) -) -) -)

Resolução da questão:

De acordo com as alternativas, o gráfico que mais se aproxima do gráfico dessa função é o da primeira alternativa. Gostaríamos de ressaltar que, para identificar a função que relaciona o volume **v** com a altura **h**, requerem-se conhecimentos que transcendem o nível de ensino médio.

02 - O lucro diário L é a receita gerada R menos o custo de produção C. Suponha que, em certa fábrica, a receita gerada e o custo de produção sejam dados, em reais, pelas funções $R(x) = 60x - x^2$ e $C(x) = 10(x+40)$, sendo x o número de itens produzidos no dia. Sabendo que a fábrica tem capacidade de produzir até 50 itens por dia, considere as seguintes afirmativas:

I. O número mínimo de itens x que devem ser produzidos por dia, para que a fábrica não tenha prejuízo, é 10.
II. A função lucro L(x) é crescente no intervalo [0, 25].
III. Para que a fábrica tenha o maior lucro possível, deve produzir 30 itens por dia.
IV. Se a fábrica produzir 50 itens num único dia, terá prejuízo.

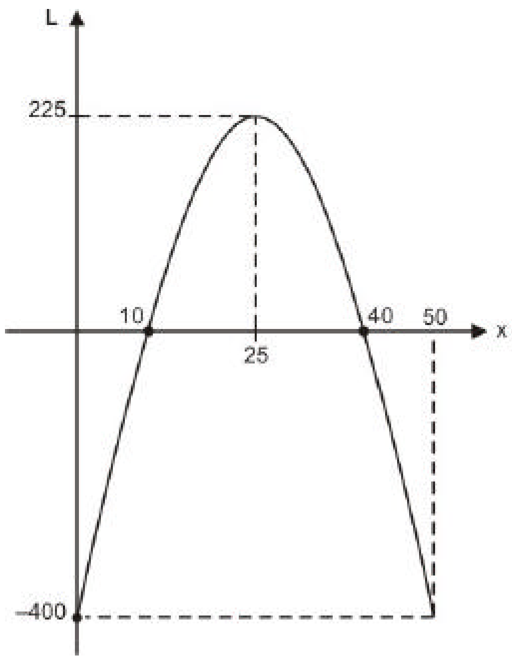
Assinale a alternativa correta.

***) Somente as afirmativas I, II e IV são verdadeiras.**
-) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas II e IV são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas I, III e IV são verdadeiras.

Resolução da questão:

$L = R - C \Rightarrow L(x) = -x^2 + 50x - 400$

Gráfico:



Análise do Gráfico
I) V
II) V
III) F
V) V

Comentário:

Questão que envolve o estudo da função quadrática, sendo possível resolvê-la pela interpretação do gráfico correspondente à função lucro diário L.

03 - Certa transportadora possui depósitos nas cidades de Guarapuava, Maringá e Cascavel. Três motoristas dessa empresa, que transportam encomendas apenas entre esses três depósitos, estavam conversando e fizeram as seguintes afirmações:

1º motorista: Ontem eu saí de Cascavel, entreguei parte da carga em Maringá e o restante em Guarapuava. Ao todo, percorri 568 km.

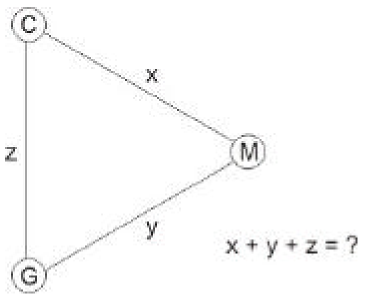
2º motorista: Eu saí de Maringá, entreguei uma encomenda em Cascavel e depois fui para Guarapuava. Ao todo, percorri 522 km.

3º motorista: Semana passada eu saí de Maringá, descarreguei parte da carga em Guarapuava e o restante em Cascavel, percorrendo, ao todo, 550 km.

Sabendo que os três motoristas cumpriram rigorosamente o percurso imposto pela transportadora, quantos quilômetros percorreria um motorista que saísse de Guarapuava, passasse por Maringá, depois por Cascavel e retornasse a Guarapuava?

***) 820 km**
-) 832 km
-) 798 km-
-) 812 km
-) 824 km

Resolução da questão:



$$\begin{array}{r} x + y = 568 \\ x + z = 522 \\ y + z = 550 \\ \hline 2x + xy + 2z = 164 \end{array}$$

$$x + y + z = 820$$

Comentário:

Questão que envolve resolução de sistemas de equações lineares, sendo que no caso, não há necessidade da determinação dos valores de x, y e z, conforme solução.

04 - João pegou a calculadora de seu pai e começou a brincar, repetindo uma mesma seqüência de operações várias vezes para ver o que acontecia. Uma dessas experiências consistia em escolher um número x_1 qualquer, somar 5 e dividir o resultado por 2, obtendo um novo número x_2. A seguir ele somava 5 a x_2 e dividia o resultado por 2, obtendo um novo número x_3. Repetindo esse processo, ele obteve uma seqüência de números

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_n$$

Após repetir o processo muitas vezes, não importando com qual valor tivesse iniciado a seqüência de operações, João reparou que o valor x_n se aproximava sempre do mesmo número. Que número era esse?

***) 5**
-) 0
-) 5/2
-) 1
-) 15/2

Resolução da questão:

$$(x_1, x_2, x_3, ..., x_4) \to \left(x_1, \frac{x_1+5}{2}, \frac{x_1+15}{4}, ...\right) \text{ onde}$$

- $x_2 - x_1 = \frac{5 - x_1}{2}$
- $x_3 - x_2 = \frac{5 - x_2}{4}$

.
.
.

$$x_n = (5 - x_1)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...\right)+x_1$$

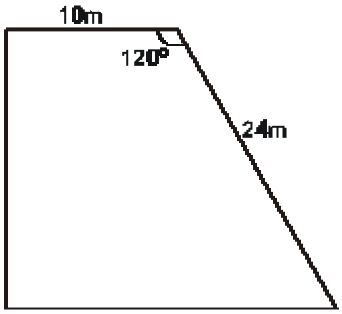
$$x_n = (5 - x_1)\cdot 1 + x_1 = 5 - x_1 + x_1 = 5$$

$$xn - 5$$

Comentário:

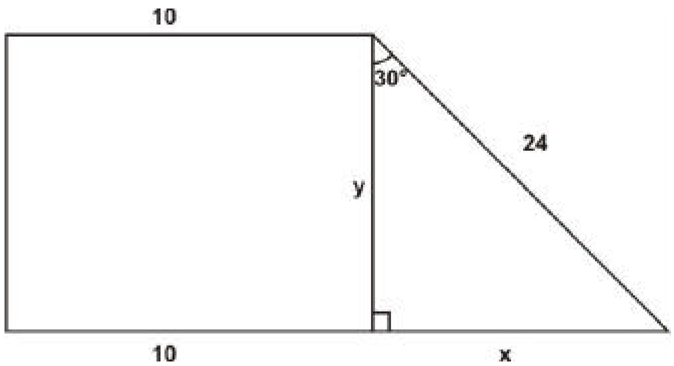
Questão bastante interessante e original, envolvendo o limite da soma de uma progressão geométrica decrescente e infinita. Caso o aluno arbitrasse um valor particular para X_1 = (inclusive 0), poderia achar a solução pela análise das respostas.

05 - Uma pessoa pretende adquirir um terreno de esquina para construir sua casa, porém ela não sabe a área do terreno. As únicas informações disponíveis são que o terreno possui o formato de um trapézio retângulo com um dos lados medindo 10 m e outro medindo 24 m. Além disso, o ângulo entre esses lados é de 120 graus, conforme a figura ao lado. Qual é a área desse terreno? Considere $\sqrt{3}$ = 1,73.



*) **332,16 m^2**
-) 314,32 m^2
-) 346,54 m^2
-) 360,58 m^2
-) 308,70 m^2

Resolução da questão:



$$\text{sen } 30° = \frac{x}{24} \Rightarrow \quad x = 12$$

$$\cos 30° = \frac{y}{24} \Rightarrow \quad y = 20{,}76$$

$$S = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(22+10)\cdot 20{,}76}{2} = 332{,}16$$

Comentário:

O cálculo de áreas é presença constante em questões do vestibular da UFPR. Esta questão envolveu conceitos de trigonometria e geometria plana, com ênfase especial para triângulo retângulo.

06 - Considere as seguintes afirmativas a respeito do polinômio $p(x) = x^2 + bx + c$:

I. Quando c = 0, o valor x = 0 é raiz do polinômio.
II. Se $x = \alpha$ e $x = -\alpha$ são raízes do polinômio e α 0, ent ão b = 0.
III. Se o número complexo x = 1–i é raiz do polinômio, então b+ic = 0.

Assinale a alternativa correta.

*) **Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.**
-) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
-) Somente a afirmativa I é verdadeira.
-) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

Resolução da questão:

I) V Se c = 0, temos $P(x) = x^2 + bx$
$P(0)$, logo "x = 0 é raiz"

II) V Como as raízes são (α) e ($-\alpha$), teremos
$P(\alpha) = P(-\alpha)$
$\alpha^2 + \alpha b + c = \alpha^2 - \alpha b + c$
$2 \alpha b = 0$
$b = 0$

III) F Aplicando relações de Girard
$b = -2$ e $c = 2$, logo $b + ic \neq 0$

Comentário:

Questão de polinômios, na qual a substituição das raízes e as relações de Girard, resolvem as alternativas.

07 - Um casal planeja ter 3 filhos. Sabendo que a probabilidade de cada um dos filhos nascer do sexo masculino ou feminino é a mesma, considere as seguintes afirmativas:

I. A probabilidade de que sejam todos do sexo masculino é de 12,5%.
II. A probabilidade de o casal ter pelo menos dois filhos do sexo feminino é de 25%.
III. A probabilidade de que os dois primeiros filhos sejam de sexos diferentes é de 50%.
IV. A probabilidade de o segundo filho ser do sexo masculino é de 25%.

Assinale a alternativa correta.

*) **Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.**
-) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas I, III e IV são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas II e IV são verdadeiras.

Resolução da questão:

HHH	HHM	HMH	HMM
MMM	MMH	MHM	MHH

$$P(H) = P(M) = \frac{1}{2} = 50\%$$

I) V $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$

II) F $\frac{4}{8} = 50\%$

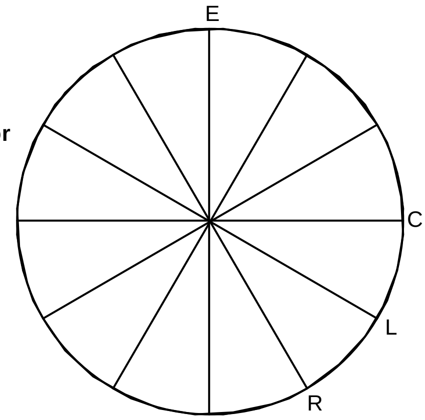
III) V $\frac{4}{8} = 50\%$

IV) F $\frac{4}{8} = 50\%$

Comentário:

Questão de probabilidades, na qual, ao escrever o espaço amostral, a resolução é imediata.

08 - **Maria e seus colegas trabalham em uma empresa localizada em uma praça circular. Essa praça é circundada por uma calçada e dividida em partes iguais por 12 caminhos retos que vão da borda ao centro da praça, conforme o esquema abaixo. A empresa fica no ponto E, há um restaurante no ponto R, uma agência de correio no ponto C e uma lanchonete no ponto L. Quando saem para almoçar, as pessoas fazem caminhos diferentes: Maria sempre se desloca pela calçada que circunda a praça; Carmen sempre passa pelo centro da praça, vai olhar o cardápio do restaurante e, se este não estiver do seu agrado, vai almoçar na lanchonete, caminhando pela calçada; Sérgio sempre passa pelo centro da praça e pelo correio, daí seguindo pela calçada para a lanchonete ou para o restaurante. Sabendo que as pessoas sempre percorrem o menor arco possível quando caminham na calçada que circunda a praça, avalie as afirmativas a seguir:**



I. Quando Carmen e Sérgio vão almoçar na lanchonete, ambos percorrem a mesma distância.
II. Quando Maria e Sérgio vão almoçar na lanchonete, quem percorre a menor distância é Maria.
III. Quando todos os três vão almoçar no restaurante, Carmen percorre a menor distância.

Assinale a alternativa correta.

***) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.**
-) Somente a afirmativa I é verdadeira.
-) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.

Resolução da questão:

$$M = \begin{cases} \text{Restaurante} = 5 \cdot \dfrac{2\pi R}{12} = \dfrac{5\pi R}{6} \\ \text{Lanchonete} = 4 \cdot \dfrac{2\pi R}{12} = \dfrac{4\pi R}{6} \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} \text{Restaurante} = 2R \\ \text{Lanchonete} = 2R + 1 \cdot \dfrac{2\pi R}{12} = \dfrac{(12+\pi)R}{6} \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} \text{Restaurante} = 2R + 2 \cdot \dfrac{2\pi R}{12} = \dfrac{(12+2\pi)R}{6} \\ \text{Lanchonete} = 2R + 1 \cdot \dfrac{2\pi R}{12} = \dfrac{(12+\pi)R}{6} \end{cases}$$

I) V $d = \dfrac{(12+\pi)R}{6}$

II) V $4\pi < (12+\pi)$

III) V $2R < \dfrac{5\pi R}{6} < \dfrac{(12+2\pi)R}{6}$

Comentário:

Trata-se de uma questão que, para provar matematicamente as conclusões, exigiram-se cálculos trabalhosos sobre comprimento e raio de circunferência.

09 - **Considere, no plano cartesiano, o triângulo de vértices A = (0,0), B = (3,1) e C = (1,2) e avalie as afirmativas a seguir.**

I. O triângulo ABC é isósceles.
II. O ponto D = $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ **pertence ao segmento AB.**
III. A equação da reta que passa pelos pontos B e C é 2x + y = 5.

Assinale a alternativa correta.

***) Somente a afirmativa I é verdadeira.**
-) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
-) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

Resolução da questão:

I) V $d_{AC} = d_{BC} = \sqrt{5}$

$d_{AB} = \sqrt{10}$

II) F $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2} \neq 0$

III) F $\begin{vmatrix} x & y \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ x & y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y = 5$

Comentário:

Conceitos gerais de Geometria Analítica sobre triângulos, distância entre pontos e equação de reta, envolvidos numa questão formulada de modo a exigir do candidato conhecimentos básicos destes assuntos.

Comentário geral da prova (Bus, Domenico, Kalinke, Proença e Cláudio)

A prova de matemática baseou-se em questões de raciocínio, com poucos cálculos numéricos, havendo uma boa distribuição dos conteúdos propostos no programa. Também existiram questões que poderiam ser resolvidas por aplicação imediata de conceitos básicos de matemática.

Provavelmente assuntos não abordados nesta primeira fase serão contemplados na segunda, como por exemplo: matrizes, determinantes, análise combinatória, logarítmos, equação de circunferência etc.