

MATEMÁTICA

01 - Os anos bissextos ocorrem de 4 em 4 anos, em geral, mas a sua caracterização exata é a seguinte: são anos bissextos aqueles que são divisíveis por 4, mas não por 100; a exceção a essa regra são os anos divisíveis por 400, que também são bissextos. Assim, o número de anos bissextos entre 1895 e 2102 é:

- *) 50
-) 47
-) 48
-) 49
-) 51

Resolução da questão:

Sol. (1896, 1900, 1904, ..., 2100)

$$\bullet a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 2100 = 1896 + (n-1)4$$

$$n = 52$$

- Divisíveis por 100 mas não por 400 $\Rightarrow \{1900, 2100\}$

$$\text{Portanto: } 52 - 2 = \boxed{50}$$

Comentário da questão:

Aplicação de progressões aritméticas, envolvendo anos bissextos que possuem regras para serem determinadas.

02 - No setor de embalagens de uma fábrica são produzidas latas de dois tipos, ambos sem tampa e com 20 cm de altura. Um desses tipos, que denominaremos lata quadrada, tem a forma de um paralelepípedo reto cuja base é um quadrado de 10 cm de lado; o outro, que denominaremos lata redonda, tem a forma de um cilindro circular reto cuja base tem 5 cm de raio. Considere que as latas sejam feitas com o mesmo tipo de folha metálica tanto nas laterais quanto nas bases e analise as afirmativas a seguir, utilizando $\pi \approx 3,14$.

- I. O rótulo de papel colado na lata redonda, envolvendo sua lateral totalmente e sem sobras, tem área suficiente para envolver também a lateral da lata quadrada, totalmente e sem sobras.
- II. A capacidade da lata redonda é menor do que a da lata quadrada.
- III. A quantidade de folha metálica usada para produzir a lata redonda é 70% da quantidade necessária para produzir a lata quadrada.

Assinale a alternativa correta.

- *) Somente a afirmativa II é verdadeira.
-) Somente a afirmativa III é verdadeira.
-) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.

Resolução da questão:

I – Falsa

$$S_{LQ} = 4(\ell) \cdot (H) = 4 \cdot (10) \cdot (20) = 800 \text{ cm}^2$$
$$S_{LR} = 2 \cdot (\pi) \cdot (R) \cdot (H) = 2 \cdot (3,14) \cdot (5) \cdot (20) = 628 \text{ cm}^2$$

II – Verdadeira

$$V_Q = (\ell)^2 \cdot (H) = (10)^2 \cdot (20) = 2000 \text{ cm}^3$$
$$V_R = \pi \cdot (R^2) \cdot (H) = (3,14) \cdot (5)^2 \cdot (20) = 1.570 \text{ cm}^3$$

III – Falsa

$$S_{TQ} = S_L + S_B = 4 \cdot (\ell) \cdot (H) + (\ell)^2 = 4 \cdot (10) \cdot (20) + (10)^2 = 900 \text{ cm}^2$$
$$S_{TR} = S_L + S_B = 2 \cdot (\pi) \cdot (R) \cdot (H) + \pi \cdot (R)^2 = 2 \cdot (3,14) \cdot (5) \cdot (20) + (3,14)(5)^2 = 706,5 \text{ cm}^2$$

$$\begin{array}{l} 900 - 100\% \\ 706,5 - x \end{array}$$

$$\boxed{x = 78,5\%}$$

Comentário da questão:

A questão cobrou os conhecimentos de área lateral, área total e volume de dois sólidos, com as suas respectivas comparações.

03 - Considere a seqüência cujo termo geral é $x_n = \frac{n + (-1)^n}{2n}$, com $n = 1, 2, 3, \dots$. Atribuindo-se valores cada vez maiores para n , o número x_n se aproxima de:

- *) $\frac{1}{2}$
-) $\frac{1}{2}$
-) $\frac{1}{4}$
-) 0

Resolução da questão:

$$x_n = \frac{2}{2n} + \frac{(-1)^n}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2n}$$

Fazendo:

$$n = 1000 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{1000}}{1000} = \frac{1}{2} + 0,001$$

$$n = 10000 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{10000}}{10000} = \frac{1}{2} + 0,0001$$

$$n \rightarrow \infty \rightarrow \frac{1}{2}$$

Comentário da questão:

Pela própria sugestão do enunciado substituindo-se “n” por valores cada vez maiores, o número se aproxima de $\frac{1}{2}$.

04 - Em levantamento feito numa sala de aula de um curso da UFPR, verificou-se que a média das idades dos 42 alunos matriculados era de 20,5 anos. Nesse levantamento foram considerados apenas os anos completos e desconsideradas todas as frações (meses, dias etc.). Passadas algumas semanas, a coordenação do curso verificou que um aluno havia desistido, e que a média das idades caiu para 20 anos. Como nesse período nenhum dos alunos da turma fez aniversário, qual a idade do aluno que desistiu?

- *) 41 anos
-) 25 anos
-) 29 anos
-) 33 anos
-) 37 anos

Resolução da questão:

$$\frac{S}{42} = 20,5 \rightarrow S = 861$$

$$\frac{S - x}{41} = 20$$

$$861 - x = 820$$

$$x = 41$$

Comentário da questão:

A estatística, através do cálculo da média aritmética, foi explorada nesta questão, que exigia uma leitura cuidadosa do enunciado para sua boa interpretação.

05 - O período da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}(2x + \frac{\pi}{4})$, é:

- *) π
-) $\frac{\pi}{2}$

-) $\frac{\pi}{4}$
-) 2π
-) $\frac{\pi}{8}$

Resolução da questão:

$$P = \frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Comentário da questão:

A resolução da questão se dá com a aplicação direta da fórmula de período de função seno.

06 - Considere as seguintes afirmativas a respeito da função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{1-x}$:

I. O ponto $x = 1$ não pertence ao conjunto D .

II. $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}$.

III. $f(x) \neq -1$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

IV. A função inversa de f é $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x}$.

Assinale a alternativa correta.

- *) Somente as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas I e IV são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas I, III e IV são verdadeiras.
-) Todas as afirmativas são verdadeiras.

Resolução da questão:

V (I) $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

V (II) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}$

V (III) Se $f(x) = -1 \Rightarrow 0 = -1$ (falso)

F (IV) $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$

Comentário da questão:

Questão envolvendo estudo de funções.

07 - Uma pirâmide de base quadrada, feita de madeira maciça, tem 675 g e 12 cm de altura. Pretende-se fazer um corte, paralelo à base, para obter uma pirâmide menor. Quantos gramas terá esta pirâmide se o corte for feito a 4 cm da base?

- *) 200 gramas.
-) 225 gramas.
-) 250 gramas.
-) 300 gramas.
-) 350 gramas.

Resolução da questão:

$$675 = (12)^3$$

$$x = (8)^3$$

$$x = 200g$$

Comentário da questão:

O aluno deveria perceber que esta questão cobrava uma proporção entre duas pirâmides, pois o corte paralelo à base gera uma pirâmide menor e um tronco de pirâmide.

08 - Calcule o seno do maior ângulo de um triângulo cujos lados medem 4, 6 e 8 metros.

- *) $\frac{\sqrt{15}}{4}$
 -) $\frac{1}{4}$
 -) $\frac{1}{2}$
 -) $\frac{\sqrt{10}}{4}$
 -) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução da questão:

Utilizando a lei dos cossenos:

$$8^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-1}{4}$$

Utilizando a relação trigonométrica fundamental.

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \left(\frac{-1}{4}\right)^2$$

$$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16}$$

$$\text{sen}^2 \alpha = \frac{15}{16}$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Comentário da questão:

Triângulos são assuntos importantes, tradicionais nas provas da UFPR. Este ano não foi diferente. Questão bem elaborada e que cobrou conceitos importantes deste capítulo da matemática.

09 - Os dados da filial de uma empresa na cidade A são transmitidos para a matriz na cidade C passando por uma estação intermediária B, que recebe os dados de A e os transmite para C. As informações são codificadas utilizando-se apenas os dígitos 0 e 1, e são transmitidas dígito a dígito. Sabendo que há uma probabilidade de 0,1% de ocorrência de erros em cada transmissão, tanto de A para B quanto de B para C, qual é a probabilidade de C receber o dígito 0 quando A envia esse mesmo dígito?

- *) 99,8002%
 -) 99,9999%
 -) 99,8500%
 -) 99,7500%
 -) 99,7001%

Comentário da questão:

A _____ B _____ C

1ª possibilidade: 0 → 99,9% → 0 → 99,8001% → 0

2ª possibilidade: 0 → 0,1% → 1 → 0,0001% → 0

$$99,8001 + 0,0001 = 99,8002\%$$

Questão de probabilidades inteligente, mas com excesso de casas decimais nos cálculos.

10 - Suponha que duas partículas P e Q se movem no plano cartesiano, de modo que em cada instante t a partícula P está no ponto $(2t, 3 - t)$ e a partícula Q está no ponto $(4t, 3t - 2)$. Com base nessas informações, avalie as seguintes afirmativas:

- I. As partículas colidem uma com a outra no instante $t = \frac{5}{4}$.
 II. Ambas as partículas passam pelo ponto $(4, 1)$.
 III. No instante $t = 1$, a distância entre as partículas é $\sqrt{5}$.

Assinale a alternativa correta.

- *) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
-) Somente a afirmativa II é verdadeira.
-) Somente a afirmativa III é verdadeira.
-) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.

Resolução da questão:

I. Falsa. Se $t = \frac{5}{4} \Rightarrow P\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right), Q\left(5, \frac{7}{4}\right)$ logo $P \neq Q$

II. Verdadeira. $P(2t, 3-t) \left\{ \begin{array}{l} x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2} \\ y = 3-t \Rightarrow t = 3-y \end{array} \right\} \frac{x}{2} = 3-y \therefore x = 6-2y$

$$Q(4t, 3t-2) \left\{ \begin{array}{l} x = 4t \Rightarrow t = \frac{x}{4} \\ y = 3t-2 \Rightarrow t = \frac{y+2}{3} \end{array} \right\} \frac{x}{4} = \frac{y+2}{3} \therefore x = \frac{4y+8}{3}$$

Como $x = x$

$$6-2y = \frac{4y+8}{3}$$

$$y = 1$$

$$x = 6-2y \rightarrow x = 4, \text{ logo o ponto é } (4,1)$$

III. Verdadeira. $t = 1 \rightarrow P(2,2)$ e $Q(4,1)$

$$dPQ = \sqrt{(2-4)^2 + (2-1)^2}$$

$$dPQ = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Comentário da questão:

Os conceitos de geometria analítica foram muito bem explorados nesta questão, que envolvia pontos e retas no plano cartesiano.