PROCESSO SELETIVO 2005
QUESTÕES DISCURSIVAS

MATEMÁTICA

A **Dado um conjunto X = {x_1, x_2, x_3, ..., x_n} com n elementos, definimos a média $\bar{x}$ e o desvio padrão d de X por:**

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad d = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots + (x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

Uma informação útil para quem analisa um conjunto de dados como X é que a maioria desses dados pertence ao intervalo $C = [\,\bar{x} - 2d, \bar{x} + 2d\,]$.

Sendo X = $\left\{\frac{5}{2}, 4, \frac{7}{2}, 3\right\}$ um conjunto de dados:

A.1) Calcule a média $\bar{x}$ e o desvio padrão d.

$$\bar{x} = \frac{\frac{5}{2} + 4 + \frac{7}{2} + 3}{4} = \frac{13}{4}$$

$$d = \sqrt{\frac{\left(\frac{13}{4} - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(\frac{13}{4} - 3\right)^2}{4}}$$

$$d = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

A.2) Verifique quais dados do conjunto X acima pertencem ao intervalo C.

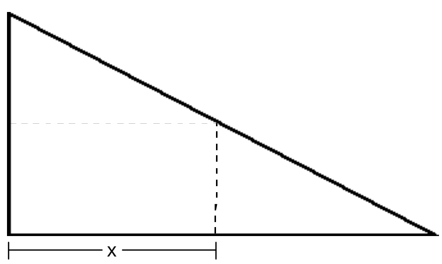
$$C = \left[\frac{13}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{13}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right] \text{ utilizando } \sqrt{5} = 2{,}2 \text{ temos:}$$

$$C = [2{,}1\ ;\ 4{,}3\,]$$

Logo, todos os valores pertencem ao intervalo C

B **Um terreno possui o formato de um triângulo retângulo cujos catetos medem 60 m e 30 m. O proprietário pretende construir nesse terreno uma casa de planta retangular, de modo que dois lados do retângulo fiquem sobre os catetos, e um vértice do retângulo pertença à hipotenusa, como na figura abaixo. Nessas condições, obtenha:**

B.1) A área do retângulo cuja base x mede 30 m.



$$\frac{30}{y} = \frac{60}{30} \rightarrow y = 15$$

$$S = 30 \times 15 = 450 m^2$$

B.2) A expressão que fornece a área do retângulo em função da medida variável x.

$$\frac{30}{y} = \frac{60}{60-x} \to y = 30 - \frac{x}{2}$$
$$S = x.y$$
$$S = x.\left(30 - \frac{x}{2}\right)$$
$$S = 30x - \frac{x^2}{2}$$

B.3) O valor de x para o qual se tem o retângulo de maior área.

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{2.\left(\frac{-1}{2}\right)} = 30$$

Comentário da questão:
Questão tradicional e bastante trabalhada sobre áreas de terrenos e funções quadráticas.

C **No sistema cartesiano ortogonal Oxy, considere a circunferência γ de centro C = (4, 3) e raio $r = 5$.**

C.1) Encontre a equação cartesiana da circunferência γ.

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2$$
$$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$$

C.2) Encontre as coordenadas dos pontos de interseção da circunferência γ com o eixo Oy.

Se $x = 0$, então:
$$y^2 - 6y = 0$$
$$y(y-6) = 0$$
$$y = 0 \quad A(0,0)$$
$$y = 6 \quad B(0,6)$$

C.3) Seja P o ponto de interseção da circunferência γ com o eixo Oy, de ordenada positiva. Encontre a equação da reta que tangencia a circunferência nesse ponto P.

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{6-3}{0-4} = -\frac{3}{4}$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 6 = \frac{4}{3}(x - 0)$$
$$4x - 3y + 18 = 0$$

Comentário da questão:
Questão completa e muito bem formulada sobre conceitos de geometria analítica.

D **Um grupo de estudantes resolveu repetir a medição da altura do Pico da Neblina feita na década de 60. Para isso, escalaram essa montanha e levaram um barômetro. Chegando ao cume da montanha, efetuaram várias medições da pressão atmosférica no local e obtiveram o valor médio de 530 mmHg. A pressão atmosférica P(h) a uma dada altura h (em metros, em relação ao nível do mar) é fornecida pela função**

$$P(h) = P_0.e^{a.h}$$

sendo *e* a base do sistema de logaritmos neperianos, P_0 = 760 mmHg a pressão atmosférica no nível do mar, e α um número que depende principalmente da temperatura média no local de medição.

Sabendo-se que, nas condições desse experimento, $\alpha = -0{,}00012$ e que os estudantes usaram os valores aproximados $\ln(760) = 6{,}63$ e $\ln(530) = 6{,}27$, qual foi a altura que encontraram para o Pico da Neblina?

$$\boxed{\begin{aligned}&P(h) = 760.e^{-0{,}00012h}\\&530 = 760.e^{-0{,}00012h}\\&\ln 530 = \ln(760.e^{-0{,}00012h})\\&6{,}27 = 6{,}63 - 0{,}00012h\\&h = 3000m\end{aligned}}$$

Comentário da questão:
Estudos de funções aplicado a uma situação prática, envolvendo estudo dos logaritmos e suas propriedades.

E **Denomina-se polinômio interpolador dos pontos $P_1 = (x_1,y_1)$, ... , $P_n = (x_n,y_n)$, de abcissas duas a duas distintas, ao polinômio p(x) de grau $n-1$ cujo gráfico contém esses pontos. Determine o polinômio interpolador $p(x) = ax^2+bx+c$ dos pontos $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (-1,9)$ e $P_3 = (2,3)$.**

$$\boxed{\begin{aligned}&P(1) = a(1)^2 + b(1) + c\\&P(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c \quad \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=1\\ a-b+c=9\\ 4a+2b+c=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2\\ b=-4\\ c=3\end{cases}\\&P(2) = a(2)^2 + b(2) + c\\&\text{Portanto:}\\&P(x) = 2x^2 - 4x + 3\end{aligned}}$$

Comentário da questão:
Estudos dos polinômios envolvendo valor numérico num ponto e a solução de um sistema linear.

Comentário geral:
A prova de matemática da UFPR foi abrangente considerando-se a 1ª e 2ª fases, pois conteúdos que não haviam sido explorado na 1ª fase foram contemplados nesta prova.
Houve questões de relativa dificuldade de resolução, sendo que foram exigidos cálculos que julgamos não pertinentes com a proposta do programa.
Com certeza, esses ajustes serão corrigidos nos próximos vestibulares.