

COMENTÁRIO GERAL

A PUC, neste vestibular, nos apresenta uma prova que, seguindo a tendência dos últimos anos, apresenta cinco questões que procuram envolver a matemática com aspectos do cotidiano. Infelizmente a PUC caiu numa armadilha muito frequente neste tipo de questões. Ao não tomar os cuidados necessários, duas destas questões, as de número 13 e 15 apresentam problemas de gabarito. Isso representa 20% da prova com problemas o que, para uma instituição como a PUC é inaceitável.

Destaque-se ainda que no geral as questões exigiam muito trabalho dos candidatos na análise das alternativas e que, em regra, apresentavam muitos cálculos ou análise extensa das afirmações.

Também há ressalvas na distribuição dos conteúdos, que foram mais relacionados à Álgebra em detrimento à Geometria, pois assuntos tradicionais, tais como os que versam sobre áreas, triângulos e trigonometria foram pouco explorados. Chamou-nos atenção, ainda, alguns equívocos de digitação, tais como na questão 16, onde se pede a "altenativa" correta e nas questões em que há fórmulas ou expressões matemáticas mais complexas, nas quais verifica-se mudança de tipo ou de tamanho de fonte. O gráfico da questão 14 também não foi trabalhado, deixando visível haver sido escaneado de alguma fonte que não foi citada.

Estes pequenos detalhes não interferem na qualidade das questões de matemática, mas podem indicar alguns descuidos que não fazem parte da história e da tradição dos vestibulares da PUC-PR.

MATEMÁTICA

08. Os Jogos Olímpicos de Verão de 2008, oficialmente conhecidos como os Jogos da XXIX Olimpíada, serão realizadas em Beijing, na República Popular da China, de 8 a 24 de Agosto de 2008, com a cerimônia de abertura marcada para acontecer às 8 da noite em 8 de agosto de 2008 (o número 8 tem significado de prosperidade na cultura chinesa). Alguns eventos serão realizados em instalações construídas em cidades vizinhas e na cidade litorânea de Qingdao. Os eventos eqüestres serão sediados em Sha Tin, Hong Kong.

(Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Jogos>)



Um atleta brasileiro desejando estar preparado para disputar a maratona nesta olimpíada fez o seguinte cronograma de treinamentos, no 1.º dia ele irá correr 4.195m; no 2.º dia 6.195m, no 3.º dia 8.195m, e assim sucessivamente até alcançar a marca oficial da prova.

Sabendo que esta marca é 42.195m, analise as seguintes sentenças:

- I) Este atleta alcançará esta marca no 20.º dia de treinamento.
- II) No 15.º dia ele correrá 30.195m.
- III) No dia em que alcançar o seu objetivo, ou seja, alcançar a marca de 42.195m terá corrido ao todo um total de 463.900m.

É verdadeira ou são verdadeiras:

- A) Somente I e III.
- B) Somente II e III.
- C) I, II e III.
- D) Somente a afirmativa III.
- E) Somente a afirmativa I.

09. Sabendo-se que as raízes da equação $x^3 - 21x^2 + 84x - 64 = 0$ são as dimensões de um paralelepípedo reto retângulo, determine a área total do cubo cujo volume é igual ao volume do paralelepípedo.

- A) 96
- B) 64
- C) 128
- D) 36
- E) 256

10. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ sendo

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 + j, & \text{se } i < j \\ 2, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } i > j \end{cases}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} -1 & \operatorname{tg} 405^\circ & \log 0,001 \\ \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} & \operatorname{sec} \pi & \log_4 64 \\ \cos 12\pi & \operatorname{cotg} \frac{45\pi}{4} & \operatorname{cosec} 450^\circ \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que $C = A \cdot B$, e que C^{-1} é a matriz inversa de C , calcule o valor do determinante da matriz C^{-1} .

- A) $-\frac{1}{40}$
- B) 40
- C) $\frac{1}{40}$
- D) $\frac{1}{20}$
- E) 20

11. Sobre conjunto dos números complexos sabemos que

$$i^2 = -1, z = a + bi \text{ e } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dados os números complexos

$$z_1 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i \text{ e } z_2 = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right),$$

considere as seguintes afirmações:

I) O argumento do complexo z_1 é igual a 315° .

II) $z_1^{10} = -2^{30}i$

III) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = -16$

São verdadeiras:

- A) I, II e III.
- B) Somente I e III.
- C) Somente I e II.
- D) Somente I.
- E) Somente II e III.

12. Um economista, no início de 2007, fez uma projeção sobre a situação financeira de um grupo de investidores que aplicam na bolsa de valores, observou que, a variação dos ganhos dessas aplicações é alterada diariamente, assim concluiu que o lucro diário é dado pela função $f(x) = |x - 200| \cdot 50$, onde x representa cada dia do ano, ($x=1,2,3...365$), e o lucro é dado em reais.
Se o grupo de investidores pretende um lucro de R\$ 5.750,00, em quais meses isso será possível?

- A) abril e novembro
- B) março e outubro
- C) março e novembro
- D) maio e outubro
- E) abril e outubro

13. Os dados abaixo referem-se aos trechos que o governo repassou à iniciativa privada, para investir na melhoria das vias, e que passarão a cobrar pedágio em 2008.

TRECHO	EXTENSÃO (em quilômetros)	NÚMEROS DE PEDÁGIOS	PREÇO DO PEDÁGIO
BR-116 (Régis Bittencourt) São Paulo - Curitiba	401,6	6	1,36 real
BR-381 (Fernão Dias) Belo Horizonte - São Paulo	562,1	8	0,99 real
BR-116/PR, BR-376/PR, BR-101/SC Curitiba - Florianópolis	382,3	5	1,02 real
BR-101/RJ	320,1	5	2,25 reais
BR-153/SP	321,6	4	2,45 reais
BR-116 Curitiba até a divisa SC-RS	412,7	5	2,54 reais
BR-393 Divisa MG-RJ até o entroncamento com a Dutra	200,4	3	2,94 reais

Com as informações acima, analise as afirmativas.

I - Os trechos que envolvem o estado do Paraná, representam aproximadamente 46% do total de vias que passarão a ser pedagiadas.

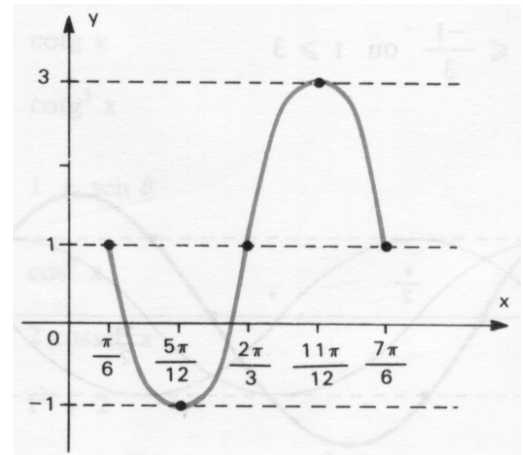
II - No trecho de maior extensão, independente da quantidade de pedágios, o usuário pagará aproximadamente R\$ 5,00, a cada trecho de 100 quilômetros.

III - Nos trechos que envolvem o estado de São Paulo, o preço médio do pedágio é R\$ 4,80.

É verdadeira ou são verdadeiras:

- A) I e II.
- B) I e III.
- C) II e III.
- D) apenas I.
- E) apenas II.

14. Em um laboratório, com o objetivo de estudar determinado fenômeno, obteve-se parte de uma onda senoidal, representada no plano cartesiano, conforme a figura.



Avalie as afirmativas, considerando o gráfico apresentado:

- A) Se a equação da onda fosse $y = 1 - 3\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, a distância entre o ponto mais alto e o ponto mais baixo do gráfico seria maior.
- B) O gráfico da onda $y = 1 - 2\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ apresenta período menor que o da função representada na figura
- C) Uma equação que pode descrever a onda apresentada no conjunto dos reais é $y = f(x) = 1 - 2\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
- D) O período é o mesmo da função $y = \text{sen}x$
- E) O período é diretamente proporcional ao coeficiente de x na equação da onda.

15. Numa certa cultura a quantidade de moscas aumenta de maneira diretamente proporcional à população presente. Um cientista obteve como resultado inicial 600 moscas e após 10 minutos o número de moscas aumentou para 1800. Sabe-se que o aumento segue a expressão $Q = Q_0 \cdot e^{kt}$ em que Q_0 é a quantidade inicial, Q é a quantidade em um instante t , t é o tempo e k é a taxa de crescimento. Considerando que o crescimento das moscas siga a expressão descrita anteriormente, avalie as afirmativas e marque a correta.

(Dados: $\ln 3 \cong 1$, $\ln 6 \cong 1,7$ e $\ln 9 \cong 2,2$.)

- A) A taxa de crescimento da cultura é 1%.
- B) Em 20 minutos haverá cerca de 3600 moscas.
- C) Em 22 minutos haverá cerca de 5400 moscas.
- D) O n° de moscas sempre triplica a cada 10 minutos.
- E) Em 15 minutos o n° de moscas já é maior que 3000.



16. Sejam a reta $\frac{x}{10} + \frac{y}{20} = 1$ e a circunferência $x^2 + y^2 = 400$.

Assinale a alternativa correta.

- A) O ponto A(0,10) é um ponto de intersecção.
 - B) a distância entre os pontos de intersecção da reta com a circunferência é $16\sqrt{5}$
 - C) O ponto B(-16,12) é um ponto de intersecção.
 - D) Os dois pontos de intersecção estão no mesmo quadrante.
 - E) A reta que une os dois pontos de intersecção passa pela origem.
17. Em uma pesquisa feita sobre o consumo dos produtos B, J e T obteve-se o seguinte resultado para as 75 pessoas consultadas, sendo que algumas não consomem nenhum produto.

CONSUMEM	SOMENTE B	SOMENTE J	SOMENTE T	B e J	B e T	J e T	B, J e T
Número de							
Pessoas	6	9	5	24	30	22	16

A probabilidade de escolher uma pessoa desse grupo ao acaso e ela:

- A) gostar do produto B é de aproximadamente 58%.
- B) não gostar de nenhum produto é de aproximadamente 11%.
- C) gostar do produto J é de aproximadamente 12%.
- D) gostar do produto T é de aproximadamente 5%.
- E) gostar dos três produtos é de aproximadamente 16%.

Comentário das questões

Questão 08

A

Progressão aritmética, de primeiro termo igual a 4195, razão 2000 e por consequência, o último termo : $4195 + (n-1).2000 = 42195.$, tal que $n = 20$, que é o vigésimo termo.

A soma dos 20 termos é: $(4195+ 42195).20 / 2 = 463.900$ m

Questão 09

A

$$x^3 - 21x^2 + 84x - 64 = 0$$

As raízes da equação, encontradas por Briot Ruffinni são 1; 4 e 16.

$$V_{\text{paralelepípedo}} = a.b.c$$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = 1.4.16 = 64$$

$$V_{\text{cubo}} = a^3 = 64$$

$$a = 4$$

$$S_{t(\text{cubo})} = 6a^2 = 6.4^2$$

$$S_{t(\text{cubo})} = 6.16 = 96$$

Questão 10

C

A matriz A tem $\det A = 5$ e a matriz B tem $\det B = 8$, logo:

$$\det (A.B) = \det A . \det B = 40.$$

O determinante da inversa de C é 40 e o determinante de C é igual a 1/40.

Questão que envolve logaritmos, determinantes, matrizes e trigonometria.

Questão 11

E

Item (a) FALSO

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{-4\sqrt{2}} = -1 \Rightarrow \theta = 135^\circ \quad (\theta \in 2^\circ \text{ Quadrante})$$

Item (b) VERDADEIRO

$$z_1^{10} = (-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{10} = \left((-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^2 \right)^5 = (-64i)^5 = -2^{30}i$$

Item (c) VERDADEIRO

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 = \left(\frac{-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i} \right)^2 = -16$$

Questão 12

C

$$f(x) = |x - 200|.50 \Rightarrow |x - 200|.50 = 5750 \Rightarrow \begin{cases} x = 85 \\ \text{ou} \\ x = 315 \end{cases}$$

Logo março e novembro

Questão 13

A

Item I - Alternativa falsa, com enunciado deixando dúvida quanto a serem trechos pedagiados ou extensão de trechos pedagiados.

Item II - Alternativa falsa, com os dados do problema e a afirmativa não sendo coerentes.

Item III - Alternativa Falsa pois o preço médio é 1,44

Questão 14

A

Amplitude do gráfico: $3 - (-1) = 4$

Amplitude da função $y = 1 - 3\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

$$y = 1 - 3(-1) = 1 + 3 = 4$$

$$y = 1 - 3(+1) = 1 - 3 = -2$$

$$4 - (-2) = 4 + 2 = 6$$

Questão 15

C

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{kt} \Rightarrow 1800 = 600 \cdot e^{k \cdot 10} \Rightarrow e^{k \cdot 10} = 3 \Rightarrow \ln \cdot e^{k \cdot 10} = \ln 3 \Rightarrow 10k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{10}$$

Logo

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{\frac{t}{10}} \Rightarrow Q(22) = 600 e^{\frac{22}{10}}$$

Onde temos: $\ln e^{\frac{22}{10}} = \ln x \Rightarrow \ln x = 2,2 \Rightarrow x = 9$. Portanto: $Q(22) = 600 \cdot 9 = 5400$

Comentário:

A questão poderia ser mais cuidadosa na informação dos dados que permite interpretações dúbias.

Questão 16 – Solução

B

$$\begin{cases} \frac{x}{10} + \frac{y}{20} = 1 \Rightarrow 2x + y = 20 \therefore y = 20 - 2x \\ x^2 + y^2 = 400 \end{cases}$$

$$x^2 + (20 - 2x)^2 = 400$$

$$x^2 + 400 - 80x + 4x^2 = 400$$

$$5x^2 - 80x = 0$$

$$x_A = 0 \Rightarrow y_A = 20$$

$$x_B = 16 \Rightarrow y_B = -12$$

$$d_{AB} = \sqrt{(16 - 0)^2 + (-12 - 20)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{256 + 1024} = \sqrt{1280} = \sqrt{256 \times 5} = 16\sqrt{5}$$

Questão 17

A

O total de pessoas que consomem o produto B é igual a 44 que representa 58,66% do total ou aproximadamente 58%