MATEMÁTICA

16. Sendo x e y números reais, leia as proposições:
    I. Se $x < -5$ e $y > -7$, então $x < y$.
    II. Se $|x| = -x$, então $x \leq 0$.
    III. Se $x \leq 2$, então $x^2 \leq 4$.
    IV. Se $0 < x < y$, então $x^2 < y^2$.

    São sempre verdadeiras:
    A) I e III.
    B) II e III.
    C) II e IV.
    D) III e IV.
    E) I e II.

    I. Falsa, pois para x = –5, 5 e y = –6, o valor de x > y.
    II. Verdadeira, pela definição de módulo.
    III. Falsa, pois para x < –2, o valor de $x^2 > 4$.
    IV. Verdadeira, pois x e y são positivos.

17. Seja **N = abc** um número de três algarismos em que a, b, e c estão em progressão geométrica.
    Sabendo-se, além disso, que:
    I. b + c = 12
    II. cba – abc = 594

    Quanto vale o produto a**.**b**.**c?
    A) 128
    B) 64
    C) 32
    D) 18
    E) 144

    N = abc = 100a + 10b + c e $b^2 = a \cdot c$

    I. b + c = 12
    II. cba – abc = 100c + 10 b + a – 100 a – 10 b – c = 99c – 99 a = 594 $\Rightarrow c - a = 6$

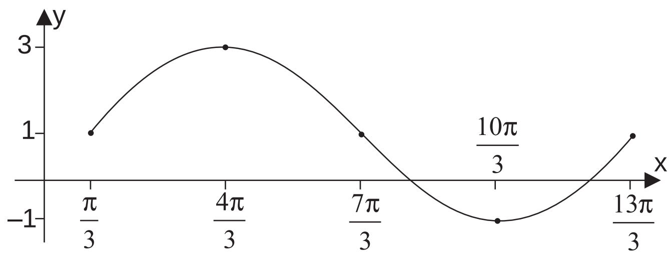
    Resolvendo o sistema: b = 12 – c e a = c – 6, então:
    $b^2 = ac \Rightarrow (12 - c)^2 = (c - 6) \cdot c$
    18c = 144, logo c = 8 ; b = 4 e a = 2.
    O produto a · b · c = 2 · 4 · 8 = 64.

18. Considere $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$ e $g(x) = x - 1$.
    Calcule $f(g(x))$ para $x = 4$:

    A) 6
    B) 8
    C) 2
    D) 1
    E) 4

    $$f(g(4)) = f(4 - 1) = f(3) = \frac{3^2 - 1}{3 - 2} = 8$$

19. A figura a seguir mostra parte de uma onda senoidal que foi isolada para uma pesquisa:



Qual das alternativas melhor representa a equação da onda para o período apresentado?

A) $y = 1 + 2sen\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

B) $y = 1 + 2sen\left(\frac{x}{2}\right)$

C) $y = 1 + 2sen\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

D) $y = 1 + 2sen\left(\frac{x}{3}\right)$

E) $y = 1 + 2sen\left(\frac{x}{6}\right)$

$y = a + b \cdot sen(mx + n)$

$$P = \frac{2\pi}{m} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{m} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$d = \frac{-n}{m} \Rightarrow \frac{\pi}{3} = -\frac{n}{\frac{1}{2}}$$

$$n = \frac{-\pi}{6}$$

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \quad e \quad b = 2$$

Logo a função será:

$$y = 1 + 2 \cdot sen\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

20. As soluções da equação:

$$y = (log_7 2 + log_7 14) + log_7 \left(\frac{2}{7}\right)^y = 0$$

pertencem ao intervalo:

A) [2 , ∞)
B) [–1, 1]
C) [0 , 4]
D) (– ∞ , 0]
E) (0 , 1]

20. SEM RESPOSTA

$$y.\log_7(2.14) + y.(\log_7 \frac{2}{7}) = y.\log_7 \frac{28.2}{7} = y.\log_7 8 = 0$$

$$\Rightarrow y = 0$$

No caso há 3 alternativas (B, C ou D) que contém a solução (y = 0) dessa equação.

21. Os valores reais de z que satisfazem a equação $sen\ x = z^2 - 6z + 9$ pertencem ao intervalo:

A) $0 \le z \le 3$
B) $-1 \le z \le 1$
C) $-1 \le z \le 3$
D) $2 \le z \le 4$
E) $-3 \le z \le 3$

Pela condição de existência de senx

$\Rightarrow -1 \le z^2 - 6z + 9 \le 1$

Resolvendo as inequações, encontram-se as seguintes soluções:
I. R
II. $2 \le z \le 4$

Cuja interseção é dada por: $2 \le z \le 4$

22. Dada a equação $8x^3 - 30x^2 + 38x - 10 = 0$ e considerando que suas raízes estão em progressão aritmética, a menor de suas raízes é:

A) 2

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{8}$

E) $\frac{5}{4}$

22. SEM RESPOSTA
Como as raízes estão em P.A.: x – r, x , x + r

A soma das raízes é: (x – r) + x + (x + r) = 3x = $\frac{30}{8} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$
Esse valor não é uma raiz da equação dada, fato que se pode verificar substituindo-se 5/4 na equação.

23. O número de raízes reais distintas da equação $4|cos\ x|^4 - 17\ |cos\ x|^2 + 4 = 0$, com $0 \le x \le 2\pi$ é:

A) 2
B) 3
C) 4
D) 0
E) 1

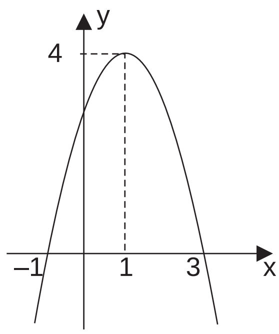
Letra C
Fazendo |cosx| = y, as raízes da equação biquadrada em |cos x|, são: 2, –2 , 1/2 ou –1/2.

|cos x| = 1/2 ⇒ cosx = 1/2 ou cosx = –1/2

Os valores de x: $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

O gabarito da PUC apresenta como resposta a alternativa A. Entretanto a alternativa correta é a letra C.

24. O gráfico a seguir é de um trinômio do 2º grau:



Assinale a alternativa que melhor representa o trinômio:

A) $y = -x^2 + 2x + 5$
B) $y = -x^2 + 2x + 2$
C) $y = -x^2 + 2x + 6$
D) $y = -x^2 + 3x + 2$
E) $y = -x^2 + 2x + 3$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$
$y = -1(x + 1)(x - 3)$
$y = -x^2 + 2x + 3$
Pela análise do gráfico, pode-se observar que ele intersecta o eixo da ordenadas em y = 3 e o vértice tem para coordenadas V(1,4).

25. Há em um hospital 9 enfermeiras (Karla é uma delas) e 5 médicos (Lucas é um deles). Diariamente, devem permanecer de plantão 4 enfermeiras e 2 médicos.
Qual a probabilidade de Karla e Lucas estarem de plantão no mesmo dia?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{8}{45}$

D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{2}{3}$

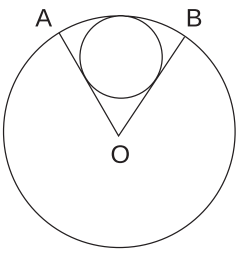
O total de equipes de plantão é: $C_9^4 \cdot C_5^2 = 1260$

O número de equipes com Karla e Lucas é: $C_8^3 \cdot C_4^1 =$ 224, pois cada um deles ocupa um dos lugares em suas equipes.

A probabilidade de os dois estarem juntos no plantão é: $p = \dfrac{C_8^3 \cdot C_4^1}{C_9^4 \cdot C_5^2}$

Calculando: $\dfrac{224}{1260} = \dfrac{8}{45}$

26. Na circunferência de centro O e raio 6, os raios OA eOB formam um ângulo de 60º.
Calcule a área do círculo tangente a OA e OB e à circunferência de centro O.



A) 3π
B) 6π
C) 9π
D) 8π
E) 4π

Sen 30º = $\dfrac{r}{6-r} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2r = 6 - r \Rightarrow r = 2$

Logo a área do círculo é $\pi \cdot (2)^2 = 4\pi$

27. Um pintor depositou a tinta que iria utilizar para um muro em um recipiente de forma cúbica de altura h, deixando-o completamente cheio. Após utilizar 192 litros de tinta, a altura h diminuiu 30 cm.
Determine a capacidade total do recipiente:

A) 216 litros
B) 512 litros
C) 343 litros
D) 647 litros
E) 729 litros

O volume retirado é

$V = a^2 \cdot 30 = 192000 \Rightarrow a^2 = 6400 \Rightarrow a = 80$

Logo o volume do cubo é igual a

$V = 80^3 = 512\,000\ cm^3 = 512$ litros

28. Um triângulo ABC ,cujos lados AB e AC têm a mesma medida, pode ser representado no sistema cartesiano pelos pontos A(0,8) , B(0,18) e C(x,0) sen-do x positivo.
A área do triângulo é:
A) 30
B) 24
C) 54
D) 40
E) 72

A abscissa do ponto C é x = 6 .

$A = \dfrac{6 \cdot 10}{2} = 30$

Logo a área do triângulo ABC = 30.

29. Dado o sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 5y - 4z = 0 \\ 5x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

afirma-se que esse sistema:
I. é sempre possível.
II. só admite para a solução x = 0 , y = 0 e z = 0.
III. admite outras soluções diferentes de x = 0, y = 0 e z = 0.
IV. nem sempre é possível.

É ou são verdadeiras:
A) I e III.
B) II e IV.
C) III e IV.
D) somente IV.
E) I e II.

29. Letra A
Calculando o seu determinante principal, tem-se:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Sendo o sistema homogêneo, sempre terá solução e no caso será possível e indeterminado, admitindo soluções diferentes da solução x = y = z = 0.
O gabarito da PUC apresenta como resposta a alternativa E. Entretanto a alternativa correta é a letra A.

30. O diâmetro de uma circunferência é o segmento dareta $4x - 3y + 12 = 0$, situado entre os eixos de coordenadas. A equação dessa circunferência é:

A) $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$
B) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$
C) $x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$
D) $x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$
E) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$

As coordenadas das extremidades do segmento são (–3,0) e (0,4) e o diâmetro 5.

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$, donde resulta a equação

$x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$

Comentário geral: (Professores.: Bus, Claudio, Domenico, Kalinke e Proença)

A PUCPR tem primado, nos últimos vestibulares, por elaborar uma prova abrangente, com conteúdos bem distribuídos e dificuldade adequada aos propósitos do Vestibular.
Neste ano não foi diferente. A prova apresentou questões bem formuladas, com boa distribuição entre os conteúdos e dentro do que se esperava da PUC-PR.
Ressalvem-se os dois equívocos de gabarito (nas questões 23 e 29), as quais certamente serão corrigidos pela comissão, e as duas questões, que não possuem resposta correta (20 e 22). Há muito tempo a prova da PUCPR não apresentava esses problemas, que, esperamos, sejam fatos isolados e que nos próximos vestibulares não se repitam, para que possamos encontrar a tradicional excelência desta instituição universitária de ensino.